La recherche mathématique aujourd’hui (édition an 2000)

Luc Lemaire

Université Libre de Bruxelles

1 Introduction

En 1988, j’ai publié dans Mathématique et Pédagogie un texte montrant par cinq exemples divers aspects de la recherche mathématique aujourd’hui. Pour assurer l’avenir de cette recherche (en particulier en Belgique où elle se porte bien), il me semble en effet important de la faire connaître aux étudiants du secondaire, afin qu’ils puissent faire le choix éventuel de leurs études supérieures en connaissance de cause.

Les cinq sujets avaient été choisis parce qu’ils pouvaient être présentés sans trop de bagage technique, et parce qu’ils représentaient des aspects variés de ce qui se passe aujourd’hui.

Preuve de la vigueur de la recherche actuelle: douze ans après, deux des sujets sont tellement modifiés que le texte de 1988 est complètement dépassé, et pas mal de choses peuvent être ajoutées aux trois autres.

Il m’est donc paru utile de rédiger une nouvelle version mise à jour de cet article (le sous-titre édition an 2000 étant une concession à la mode).

Les mathématiques sont trop souvent perçues par le grand public comme une branche morte, un formalisme utile mais bien connu depuis très longtemps.

Or la réalité est toute autre: on fait des recherches en mathématique, on en fait peut-être plus qu’à n’importe quelle époque. Environ 60.000 articles sont publiés chaque année - de quoi remplir quelques rayons d’une bibliothèque. De plus, des problèmes fondamentaux restent à élucider, et on découvre régulièrement des résultats aussi importants que ceux que nous ont laissés les siecles passés.

Si ces faits sont peu connus, c'est que pour comprendre une bonne partie de ces résultats, il faut déjà connaître beaucoup de mathématique, et qu'on ne peut pas s'appuyer sur une image concrète comme dans les sciences naturelles.

Heureusement, un certain nombre d'exemples peuvent (je l'espère!) être expliqués sans faire appel à des connaissances préalables, et le texte qui suit est une tentative de réponse à la question: comment donner à des non-mathématiciens (en particulier de jeunes élèves) une idée de ce qui se fait en mathématique.

Comme point de départ des recherches mathématiques, supposons que nous voulions résoudre un problème, dans n'importe quelle branche: science, économie, etc. On essayera de le mettre en équation, c'est-à-dire d'écrire une équation qui le représente. Ensuite on la résoudra, ce qui donnera la solution du problème.

En résumé :

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\text{Problème}} & \rightarrow & \boxed{\text{Equation}} \\ & & \downarrow \\ \boxed{\text{Solution du problème}} & \leftarrow & \boxed{\text{Résolution de l'équation}} \end{array}$$

Schéma 1

Tout le monde a rencontré cette démarche dès l'école primaire, lorsqu'il s'agissait de calculer le bénéfice d'un marchand débitant des mètres de tissus à des prix variés.

En fait, beaucoup de problèmes ne se traduisent pas par des équations, mais par des modèles mathématiques plus compliqués, qu'il faut alors étudier. Pour simplifier, je n'aborderai pas ces questions, et me contenterai d'envisager le cas des équations.

Par exemple, on peut obtenir une équation linéaire $ax+b=0$, dont la solution est évidemment $x=-b/a$, ou une équation du deuxième degré $ax^2+bx+c=0$, dont les solutions sont données par la célèbre formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

On pourrait aussi obtenir des équations cubiques ou quartiques:

$ax^3+bx^2+cx+d=0$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

et à nouveau on peut trouver des formules - moins connues et plus compliquées - donnant explicitement les solutions :

x= expression faisant intervenir les quatre opérations et des racines

Par contre, à partir de l'équation du 5ème degré

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

on sait depuis Abel (1826) et Galois (1831) qu'il n'existe pas de formule générale de ce type donnant les solutions de l'équation (on dit qu'on ne peut pas "résoudre l'équation par radicaux").

Ceci reflète une situation assez fréquente, que je résumerai comme suit:

Sauf dans quelques cas heureux, on ne peut pas écrire une formule donnant les solutions d'une équation.

Dès lors, le processus de résolution des problèmes du schéma 1 est bloqué: on a une équation mais pas ses solutions. Il faut alors trouver autre chose pour avoir quand même des informations sur la solution du problème. D'une certaine façon, ceci est pour moi le début des mathématiques: puisqu'on ne peut résoudre individuellement chaque équation, on a développé des méthodes plus générales, qui donnent des indications sur les solutions. L'étude de ces méthodes est ensuite aidée par l'élaboration d'une théorie générale qui les recouvre.

Très schématiquement, je présenterais la situation comme suit:

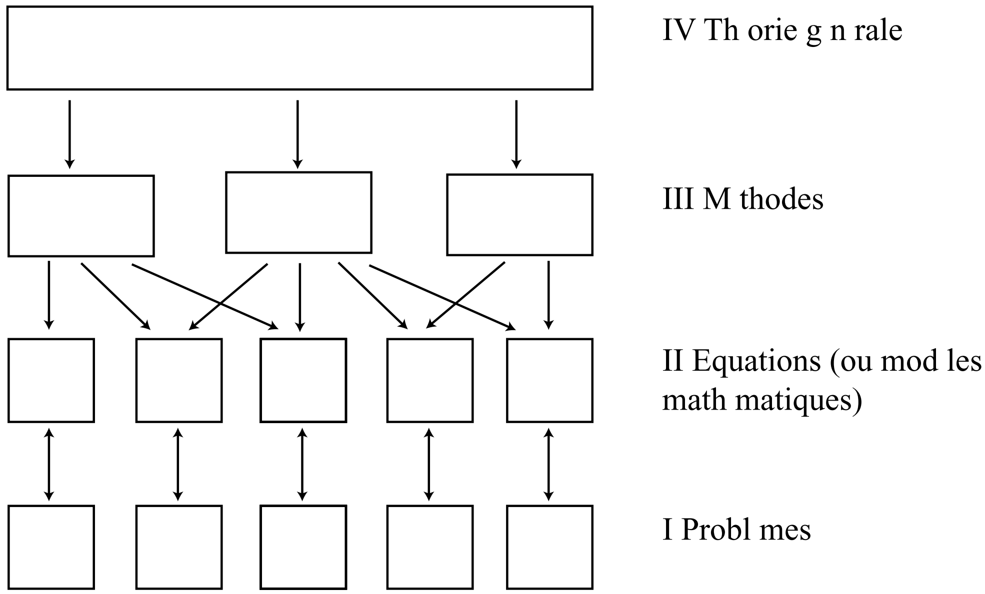


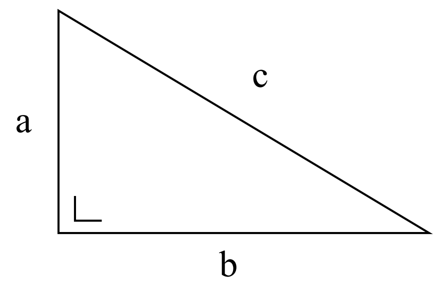
Schéma 2

Par exemple, si on ne peut pas résoudre une équation du 5ème degré par radicaux (en II), on sait au moins par des résultats plus généraux (en III) qu'elle a au maximum 5 solutions. De plus, la théorie de Galois permet de préciser quand on peut la résoudre par radicaux et pour cela il a introduit la notion de groupe, qui certainement entre dans la théorie générale et a des applications dans de très nombreuses méthodes en III et équations en II. Ainsi, le fait qu'on ne puisse pas résoudre toutes les équations du 5ème degré par radicaux a fait progresser l'ensemble des mathématiques.

Voyons maintenant quelques exemples de sujets de recherches qui illustrent ceci. Leur choix est purement personnel et ils ne donnent certainement pas une idée équilibrée de l'ensemble des mathématiques. Les cinq sujets sont distincts, et on peut donc sauter un paragraphe au gré de sa fantaisie.

1. Le théorème de Fermat-Wiles

Commençons cet aperçu des mathématiques d'aujourd'hui par le théorème de Pythagore (qui en fait était déjà connu des Babyloniens, 1000 ans avant Pythagore): dans un triangle rectangle, la somme des carrés des longueurs des côtés adjacents à l'angle droit est le carré de la longueur de l'hypoténuse, en formule :



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Par exemple, si $a = 1$, $b = 2$, on a $c = \sqrt{5}$, qui n'est pas un nombre entier.

On pourrait se poser le problème: quels sont les triangles rectangles dont les trois côtés sont de longueur entière.

Les équations de ce problème sont:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ a, b, c \text{ des entiers positifs.} \end{cases}$$

Ce type d'équation n'est pas très familier: à première vue il y a une équation et trois inconnues, mais la condition a, b, c entiers modifie toute la question: si on choisit au hasard a et b, c a peu de chance d'être entier.

Pour le plaisir, voici la solution complète de cette équation.

Dans un premier temps, on peut chercher des exemples de solutions, et on vérifie que:

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2 \\ 5^2 + 12^2 &= 13^2 \end{aligned}$$

Ensuite, on peut remarquer que si (a, b, c) est une solution et k un entier positif, alors $(k.a, k.b, k.c)$ est également une solution, ce qui nous en donne une infinité.

On peut aussi utiliser quelques formules d'algèbre, et voir que si m et n sont des entiers positifs avec $m > n$, alors en posant $a = m^2 - n^2, b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$, on a bien

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= m^4 + n^4 - 2m^2n^2 + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + n^4 + 2m^2n^2 \\ &= (m^2 + n^2)^2 \\ &= c^2. \end{aligned}$$

En groupant les deux dernières remarques, on voit que si k, m, n sont des entiers positifs avec $m > n$, alors

$$a = k(m^2 - n^2), b = 2kmn, c = k(m^2 + n^2)$$

est une solution.

Vérifions enfin que ces formules fournissent toutes les solutions.

Pour cela, remarquons d'abord que l'équation

$$a^2 + b^2 = c^2$$

peut aussi s'écrire

$$x^2 + y^2 = 1,$$

où $x = a/c$ et $y = b/c$ sont des nombres rationnels positifs.

La question est donc de trouver sur le cercle de rayon un du plan les points dont les deux coordonnées sont rationnelles et positives.
Nous pouvons réécrire les formules donnant (a, b, c) en fonction de m, n et k, et nous avons

$$\begin{aligned} x = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} &= \frac{1 - (\frac{n}{m})^2}{1 + (\frac{n}{m})^2} \\ y = \frac{2mn}{m^2 + n^2} &= \frac{2(\frac{n}{m})}{1 + (\frac{n}{m})^2} \end{aligned}$$

Posons $t = \frac{n}{m}$ (et donc t est positif et rationnel). Les valeurs de x et y données par les formules ci-dessus sont donc paramétrisées par

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, y = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad t \in Q^+$$

Montrons que toutes les solutions rationnelles (x, y) de $x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0$ s'obtiennent ainsi. Pour cela, posons simplement
$t = \frac{y}{x+1}$ (ce qui implique t rationnel).

On obtient alors:

$t(x + 1) = y,$

$t^2(x + 1)^2 = y^2 = (1 - x^2) = (1 + x)(1 - x)$

d'où $t^2(x + 1) = 1 - x$,

$t^2x + x + t^2 - 1 = 0$ d'où

$x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$, et ensuite

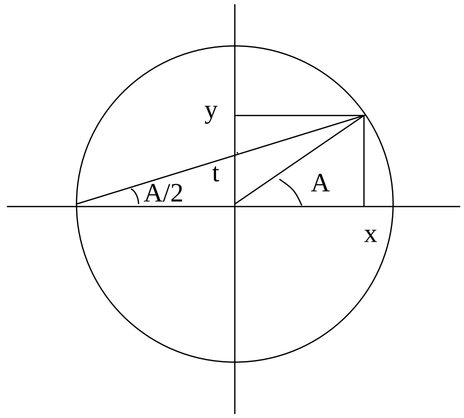
$y = t(x + 1) = t(\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} + 1) = \dfrac{2t}{1 + t^2},$

ce qui conclut la démonstration: chaque couple (x, y) provient d'une valeur rationnelle de t.

Ceci était connu d'Euclide et Diophante (mathématicien grec du 4ème siècle).

On ne peut pas dire exactement comment ces formules ont été découvertes (à l'époque comme maintenant les mathématiciens procèdent par tatonnement et par intuition), mais aujourd'hui on peut mieux les comprendre en terme de trigonométrie, en reconnaissant les formules classiques de la tangente de l'angle demi.

Géométriquement on a:



$$x = \cos A, y = \sin A, t = \text{tg}\frac{A}{2}$$

Mais revenons au théorème de Fermat.

En 1637, le mathématicien ”amateur” Pierre de Fermat (juge au tribunal de Toulouse) lit une traduction latine du traité (grec) de Diophante. Et il la lit comme un chercheur, c'est-à-dire qu'il ne se contente pas de comprendre le texte, il se pose des problèmes qui pour lui sont naturellement soulevés par les résultats donnés. Par exemple il se demande si on peut aussi résoudre l'équation $a^3 + b^3 = c^3$, ou plus généralement $a^n + b^n = c^n$, toujours avec a, b, c entiers positifs.

Et il écrit (en latin) dans la marge de son livre: ”Un cube n'est jamais la somme de deux cubes, une puissance quatrième n'est jamais la somme de deux puissances quatrièmes et plus généralement, aucune puissance supérieure à 2 n'est jamais la somme de deux puissance analogues. J'ai trouvé une démonstration vraiment merveilleuse de cette proposition, mais la marge est trop petite pour l'y écrire”.

En d'autres termes, il affirme que pour $n \geq 3$, on ne peut trouver aucun triple (a, b, c) d'entiers positifs tels que $a^n + b^n = c^n$.

Cette phrase de Fermat, publiée après sa mort est le point de départ d'une des histoires les plus fascinantes des mathématiques, car après d'innombrables travaux pendant plus de 350 ans, durant lesquels le ”théorème de Fermat” a pris le statut d'un véritable mythe en mathématique, cet énoncé n'a finalement été démontré qu'en 1995!

Remarquons d'abord qu'un ordinateur - aussi puissant soit-il - ne peut pas résoudre ce type de question. En effet, s'il peut vérifier qu'un grand nombre de triples (a, b, c) ne satisfont pas l'équation, il ne peut pas faire une infinité de calculs et ainsi vérifier qu'il n'y a aucune solution.

Au cours des siècles, les mathématiciens ont donc développé un grand nombre de méthodes et de concepts pour faire avancer cette question.

Par exemple, Kummer a introduit les "nombres idéaux", devenus ensuite les idéaux en algèbre. Par ailleurs, les nombres complexes interviennent dans divers résultats partiels au cours des siècles.

Dans les vingt dernières années, le nombre de travaux importants touchant au théorème de Fermat est devenu très important, mais ce fut une surprise spectaculaire lorsque le mathématicien anglais Andrew Wiles annonça, lors d'une réunion à Cambridge le 23 juin 1993, qu'il avait démontré le théorème de Fermat.

Sa démonstration, complexe et brillante, s'appuie sur une série de résultats antérieurs, et je vais citer ici quelques jalons.

L'idée de base a été obtenue en 1985 par G. Frey et est la suivante.

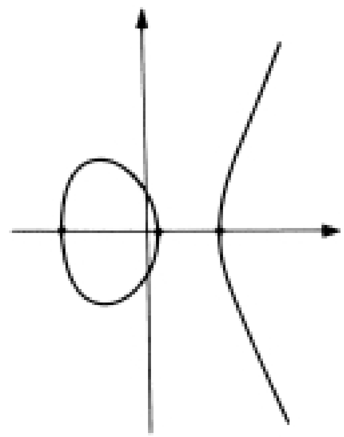
Supposons le théorème de Fermat faux. Il existe donc des entiers positifs. a,b et c et un entier $n \geq 3$ tels que

$$a^n + b^n = c^n$$

Dans le plan de coordonnées (x, y) considérons alors la courbe d'équation

$$y^2 = x \cdot (x - a^n)(x + b^n).$$

C'est une courbe du troisième degré, dont le graphe ressemble à ceci:



Dans $\mathbb{R}^2$, on ne peut rien déduire, mais remplacons les réels x et y par des complexes. L'équation du troisième degré est maintenant complexe, et fournit deux équations réelles en les quatre variables réelles qui forment le couple de complexes (x, y). L'ensemble des solutions forme donc une surface réelle dans $\mathbb{R}^4$, appelée une courbe elliptique, qui en fait à la forme d'un tore.

Or, la théorie des courbes elliptique est très développée. En particulier, dans les années 50, deux mathématiciens japonais, Taniyama et Shimura, ont énoncé une ambitieuse conjecture affirmant que toute courbe elliptique possède une propriété de symétrie très forte, à savoir est modulaire (il n'est pas possible de définir cette notion ici).

Et ce que Frey affirme en 1985 est que la courbe elliptique construite avec les nombres a, b et n ci-dessus n'est pas modulaire si $a^n + b^n = c^n$.

Donc, si le théorème de Fermat est faux, la conjecture de Taniyama - Shimura l'est également.

Cette affirmation de G. Frey est démontrée par K. Ribet l'année suivante, et en 1986 on sait donc que si on peut démontrer la conjecture de Taniyama - Shimura, on aura démontré au passage le théorème de Fermat.

Andrew Wiles raconte que depuis son enfance il connaissait l'énoncé du théorème de Fermat, et avait rêvé de le démontrer. Son travail de recherche portait toutefois sur un sujet apparemment distinct: les courbes elliptiques.

En 1986, le résultat de Frey - Ribet le poussa donc naturellement à tenter l'exploit de démontrer la conjecture de Taniyama - Shimura - et donc le théorème de Fermat.

De façon tout-à-fait inhabituelle, Wiles a travaillé seul pendant sept ans, sans publier de résultats partiels et sans indiquer à ses collègues et amis ce qu'il faisait, visant le tout pour le tout, c'est-à-dire une démonstration complète.

Et c'est ce résultat qu'il a annoncé à Cambridge en 1993, déclenchant (une fois n'est pas coutume) une série d'articles dans les journaux du monde entier.

(Plus précisément, il démontre un cas particulier de la conjecture de Taniyama - Shimura, suffisant pour impliquer le théorème de Fermat).

Mais l'histoire ne s'arrête pas là. La démonstration de Wiles fait l'objet d'un article de 200 pages qu'il soumet au journal Annals of Mathematics. Les éditeurs du journal soumettent ce manuscrit à six experts, pour vérification (normalement un ou deux experts sont consultés, mais l'article est tellement important et difficile que les éditeurs veulent être certains).

Et un des experts trouve un trou sérieux dans la démonstration, que Wiles ne peut pas boucher rapidement.

A nouveau Wiles s'isole pendant que les rumeurs vont bon train, et travaillant avec son ami R. Taylor arrive à boucher le trou après un an.

L'ensemble de la démonstration est finalement publiée en 1995.

En résumé:

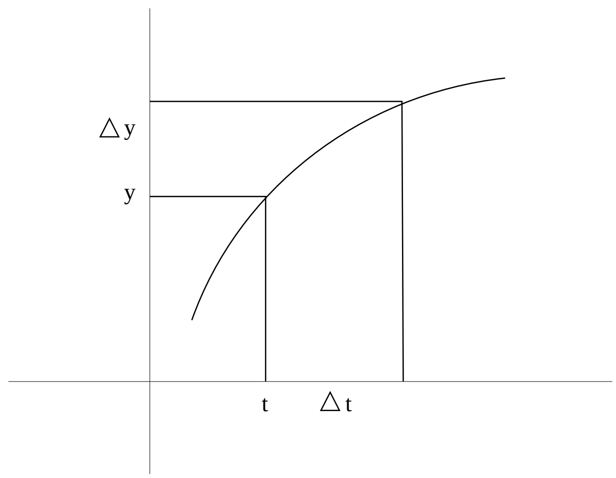
- il semble clair que Fermat a fait une erreur dans sa démonstration (plus tard, il écrit d'ailleurs qu'il a démontré un cas particulier)
- cette erreur a été bénéfique pour le développement des mathématiques: l'étude de ce problème (II dans le schéma 2) a motivé d'importants développements aux niveaux III et IV, qui à leur tour se sont appliqués à d'autres équations
- la solution montre bien l'unité des mathématiques: un problème de théorie des nombres entiers fait appel à un nombre énorme de notions de diverses branches des mathématiques.

Et ajoutons que cette histoire fascinante est complètement atypique, le développement habituel de la recherche en mathématique n'est pas lié à des phrases écrites dans des marges, des problèmes résistant 350 ans ou des mathématiciens s'isolant pendant des années.

2. Equations différentielles

Rappelons d'abord la notion de dérivée. Si $y(t)$ est une fonction, et Δt un accroissement de la variable t, considérons l'accroissement correspondant de y:

$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$



Le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ mesure le taux d'accroissement de la fonction sur l'intervalle Δt.

On fait alors tendre Δt vers 0, et si elle existe, on note $y'(t)$ la valeur limite de $\frac{\Delta y}{\Delta t}$. Ce nombre $y'(t)$ - la dérivée de y en t - représente les taux d'accroissement de la fonction en t.

Si t représente le temps et $y(t)$ la position d'un point se déplaçant sur une doite, $y'(t)$ représente la vitesse du point au temps t.

On peut alors considérer $y'(t)$ comme une nouvelle fonction. Sa dérivée est notée $y''(t)$: c'est la dérivée seconde de y.

Si $y(t)$ est la position d'un point mobile, $y''(t)$ est le taux d'accroissement de la vitesse, c'est-à-dire l'acccélération du point.

L'équation fondamentale de la mécanique de Newton est:

$$F = m \cdot a,$$

où F est la force subie par un point, m sa masse et a son accélération. On a une idée assez intuitive de cette loi en voiture: quand on appuie sur l'accélérateur, on communique une force à la voiture et elle a une accélération proportionnelle à la force et inversement proportionnelle à la masse.

En général, la force subie par un point peut dépendre de l'instant t, de la position y du point (par exemple, un point attaché à un ressort subit une plus grande force si le ressort est tendu), et de sa vitesse y' (les forces de frottement varient avec la vitesse). Nous écrirons alors l'équation sous la forme:

$$my'' = F(t, y, y').$$

Le problème que l'on se pose est le suivant: l'expression de la force étant donnée, déterminer la trajectoire du point, c'est-à-dire la fonction $y(t)$. L'inconnue n'est donc plus un nombre, mais une fonction. Une telle équation faisant intervenir les dérivées de l'inconnue est appelée équation différentielle.

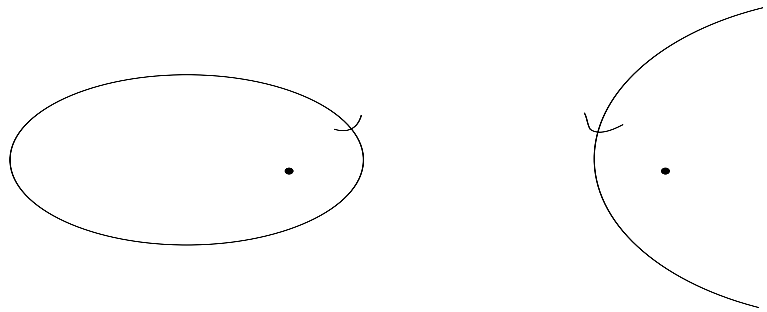
On démontre que si à un instant initial t_0 on prescrit la position et la vitesse du point (c-à-d. $y(t_0), y'(t_0)$), alors la trajectoire ultérieure est complètement déterminée: si on lance un objet, on fixe sa position et sa vitesse au moment où on le lache, et il continue ensuite tout seul.

L'équation $F = m \cdot a$ peut s'écrire dans des cas plus compliqués: un point se déplaçant dans $\mathbb{R}^3$ ou plusieurs points agissant les uns sur les autres. C'est en fait pour étudier dans un même cadre la trajectoire des planètes et la géométrie des courbes que Newton et Leibnitz ont inventé la notion de dérivée et le calcul différentiel (vers 1675).

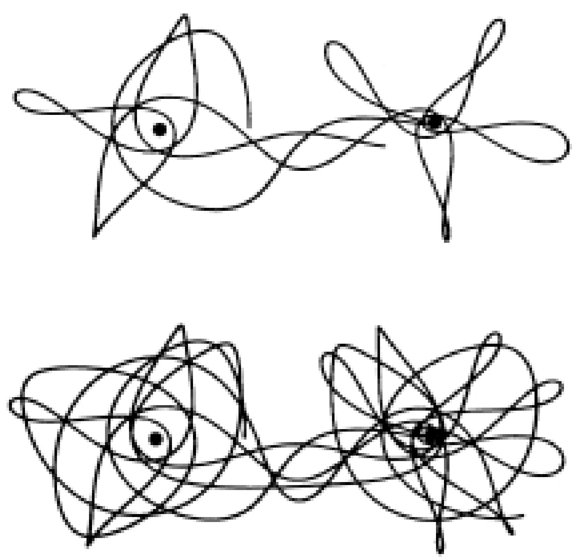
Nous retombons immédiatement sur le point de départ de ce texte: il est très rare que l'on puisse résoudre une équation différentielle!

Reprenons le problème de l'astronomie: les corps dans l'espace s'attirent les uns les autres selon une force déterminée par les lois de Newton.

Le cas le plus simple est le problème des deux corps: par exemple une étoile et une planète, sans autre corps à proximité. Dans ce cas, on peut résoudre explicitement les équations, et on sait qu'un corps décrit un ellipse, une parabole ou une hyperbole autour de l'autre.



Par contre, dès qu'on passe au problème des 3 corps, on ne possède pas de formule donnant la solution générale de l'équation $F = m \cdot a$. Et il est fort probable qu'on n'en trouve jamais. Par exemple, pour un système constitué de 2 étoiles tournant l'une autour de l'autre et d'une planète plus légère, une trajectoire telle que celle du dessin est parfaitement possible (ici les deux étoiles tournent l'une autour de l'autre, mais on suit le mouvement en les observant ce qui fait qu'elles semblent immobiles):



on ne s'attend donc pas à trouver une formule décrivant toutes les trajectoires de ce genre.

Mais alors, quel type de résultat peut-on obtenir?

D’une part, on peut obtenir des approximations de la solution.

Dans l’étude du système solaire, comme chaque planète est beaucoup plus légère que le soleil, l’attraction d’un planète sur une autre est beaucoup plus faible que celle du soleil. En première approximation, chaque planète a une orbite elliptique autour du soleil, orbite qui en fait est perturbée par les autres planètes.

Et ces perturbations induisent des différences par rapport aux mouvements elliptiques qui peuvent être calculées.

Dès le milieu du 18ème siècle, Lalande et Clairaut calculent que les perturbations dues à Jupiter et Saturne retarderont d’un an et huit mois le retour de la comète de Halley, et prévoient ce retour pour le milieu d’avril 1759, à un mois près - prévision vérifiée le 12 mars!

En 1846, les mathématiciens Adams et Le Verrier ont étudié les perturbations de l’orbite d’Uranus depuis sa découverte en 1781, et ont déduit qu’elles devaient être provoquées par la présence d’une planète inconnue, dont ils ont pu déterminer la position. Suivant ces indications, elle a été observée immédiatement par Galle. (Il s’agit de Neptune.)

Ces calculs sont des exploits impressionnants, d’une extrême précision, utilisant à la fois des siècles d’observations astronomiques et la puissance du calcul différentiel.

Notons qu’il a fallu attendre 1930 pour découvrir Pluton, à un endroit prévu par un coup de chance et quelques fautes de calcul.

Actuellement, la trajectoire des satellites artificiels est contrôlée par des ordinateurs. Ils ne peuvent pas résoudre les équations de la mécanique, mais ils peuvent donner des approximations de la solution avec une précision remarquable. La réussite la plus spectaculaire dans ce domaine est pour moi la mission de la sonde Voyager 2: lancée en 1977, elle est passée près de Jupiter en 1979, de Saturne en 1981, d’Uranus en 1986, et de Neptune en 1989. Elle a parcouru plusieurs milliards de km, et cela avec une quantité de carburant finalement très faible! Le principe d’un tel voyage est d’utiliser la force de gravitation de chaque planète pour être catapulté vers la suivante: on calcule qu’une petite déviation (consommant peu de carburant) faisant passer un peu plus près d’une planète aura des effets très importants sur la suite du parcours.

L'usage de l'ordinateur ne résout toutefois pas les questions théoriques. En 1887, le roi Oscar II de Suède a institué un prix pour récompenser celui qui établirait que le système solaire est stable, c'est-à-dire qu'aucune planète ne risque d'être éjectée du système (non, ce prix ne s'appelait pas un Oscar).

Comment ceci pourrait-il se produire? On peut imaginer que chaque fois que la Terre et Mars passent du même côté du Soleil, l'attraction qu'elles exercent l'une sur l'autre les rapproche un petit peu, et qu'après des millions d'années elles en viennent à passer telllement près l'une de l'autre que Mars soit catapultée vers le Soleil et la Terre hors du système.

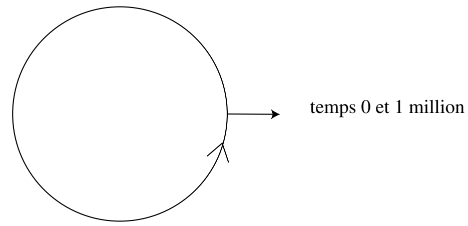
Comme une petite perturbation à un moment donné peut avoir des effets énormes bien plus tard, le calcul de solutions approximées par ordinateur ne peut pas aider à cette question.

Le prix fut gagné en 1900 par Poincaré qui ne résolut pas la question, mais qui développa pour commencer son étude une branche des mathématiques initiée par Euler (1735) et Riemann (1851), mais qui n'avait rien à voir avec la mécanique: la topologie ou étude des formes.

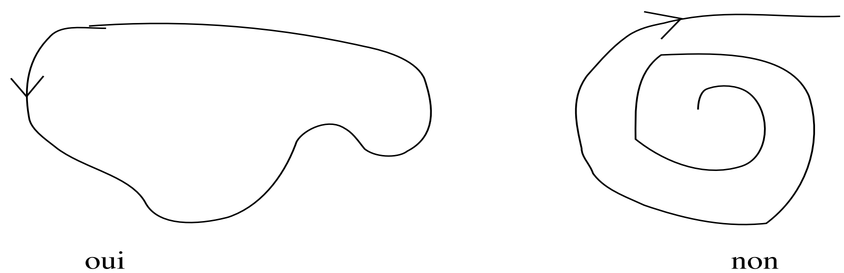
Son idée de départ est la suivante. Supposons qu'en deux instants différents, toutes les planètes se retrouvent exactement aux mêmes endroits avec les mêmes vitesses, par exemple aux temps 0 et 1 million d'années. Puisque les positions et les vitesses déterminent la suite du mouvement et que ces données sont les mêmes au temps 1 million qu'au temps 0, le système doit recommencer le même mouvement et reviendra au même point au temps 2 millions, puis 3, 4 et ainsi de suite. On dit alors que le système est périodique, et il doit alors être stable, car si une planète se perdait, elle ne serait pas au rendez-vous suivant.

On peut représenter tout le système (disons 40 planètes et satellites) par un seul point bougeant dans un grand espace (de dimension 240) représentant les positions et vitesses des astres.

Dire que le système est périodique signifie que ce point a une trajectoire fermée, par exemple un cercle



Mais que cette courbe soit un cercle, une ellipse ou une courbe fermée plus compliqué n'a aucune importance pour le problème: la seule chose qui compte est qu'elle soit fermée.



C'est le point de départ du travail de Poincaré, et il est plus difficile d'expliquer la suite. Le paragraphe 3 montrera de façon plus convaincante l'utilité de cette idée.

En 1963, Arnol'd, Kolmogorov et Moser ont utilisé les développements de la topologie pour donner un élément de réponse (qui aurait laissé perplexe le roi Oscar): moyennant certaines hypothèses, un système planétaire est probablement stable. Et ceci dans le sens précis suivant. Considérons une donnée initiale (positions et vitesses au temps zéro). La probabilité pour qu'elle donne une trajectoire instable est nulle. Mais - et c'est là le hic - une petite variante de cette donnée initiale peut le rendre instable.

Mais la réponse "finale" à la question de la stabilité de notre système solaire n'est venue que récemment, des travaux de G.J. Sussman et J. Wisdom (en 1988) et surtout de Jacques Laskar depuis 1989.

Pour l'expliquer, il faut parler un peu d'un sujet à la mode depuis une quinzaine d'années: la théorie du chaos.

Commençons par un exemple simple: le jeu de dés.

Quand nous lançons un dé, nous le lachons à un certain moment avec une position et une vitesse donnée, et les équations de la mécanique nous disent que la suite de son mouvement est déterminée.

Mais bien sûr, il va s'arrêter sur une face au hasard (avec une probabilité de un sur six).

Comment expliquer ce paradoxe apparent qu'un mouvement totalement déterminé mène à un résultat aléatoire (c'est-à-dire laissant la place au hasard).

La réponse est qu'on ne peut pas déterminer *exactement* la position et la vitesse du dé. Si on essaie de le lancer deux fois de la même manière, on aura toujours un petit écart - fut-il d'un dixième de millimètre. Et au premier rebond du dé cet écart minime pourra le faire rebondir d'un côté ou d'un autre, ce qui amènera un écart important au deuxième rebond, écart qui ne fera que s'amplifier.

En résumé, le dé a un comportement probabiliste parce qu'un petit écart de position à un moment donné (écart trop petit pour être observé) donne lieu rapidement à un écart beaucoup plus grand.

En mathématique, on dit qu'un système est *chaotique* s'il est régi par des équations différentielles telles qu'un petit écart de position soit multiplié - par exemple par 10 - dans un temps petit par rapport à la période d'observation.

En utilisant des ordinateurs, et un modèle mathématique adapté pour les équations du système solaire, J. Laskar a "suivi" les mouvements des planètes sur 200 millions d'années, en faisant varier plusieurs fois les conditions initiales (positions et vitesses à l'instant de départ).

Ces calculs montrent que les trajectoires des grosses planètes (Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune) sont stables: elles ne varieront pas pendant plusieurs milliards d'années.

Par contre, les trajectoires des petites planètes intérieures (Mercure, Vénus, la Terre et Mars) sont chaotiques: un écart de position d'un centimètre peut devenir un million de kilomètres en 200 millions d'années.

Même si les équations du mouvement sont parfaitement déterministes et ne laissent aucune place au hasard, il est évidement impossible de mesurer les positions des planètes à un centimètre près, et donc de dire où elles seront dans 200 millions d'années à un million de kilomètres près.

Les calculs de Laskar en disent plus:

Les mouvements de Vénus, la Terre et Mars sont chaotiques - et les orbites de ces planètes peuvent varier fortement mais elles restent toutefois dans des bandes séparées.

Par contre, Mercure pourrait traverser l'orbite de Vénus, et même être éjectée du système solaire.

De façon plus concrète, ces calculs donnent une explication du comportement mystérieux de Vénus. En effet, alors que les huit autres planètes tournent toutes sur elles-mêmes dans le même sens (le soleil se lève à l'Est), Vénus tourne dans l'autre sens.

Explication: le modèle montre que la position de l'axe de rotation de Vénus est chaotique, et qu'il a pu se retourner plusieurs fois depuis la création du système solaire.

Si Vénus tourne dans l'autre sens que les autres planètes, ce n'est pas de façon systématique, mais de façon variable.

Des calculs montrent aussi que si la lune n'existait pas, l'axe de la Terre serait lui aussi instable: au lieu de rester à $23°$ 30, il pourrait passer de 0 à $60°$ en deux millions d'années, avec des conséquences sur le climat qui nous auraient sans doute empêché d'être ici pour les étudier! Heureusement pour nous, la lune est bien là.

Pour conclure ce paragraphe, je voudrais préciser que ces résultats récents ne contredisent pas ceux de Newton, Adams ou Le Verrier, mais qu'ils les prolongent.

Pendant 4000 ans, les observations astronomiques donnent l'image d'une situation stable.

De même, les calculs de Laskar confirment que les trajectoires des planètes resteront stables pendant au moins un million d'année - ce qui aurait rassuré le roi Oscar.

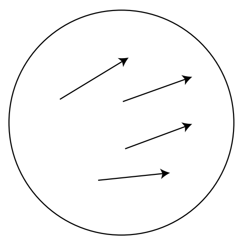
Mais à l'échelle de l'univers avec un système solaire vieux de 5 milliards d'années, une étude sur 200 millions d'années a un sens, et à cette échelle de temps apparaissemt des instabilités.

L'analyse mathématique donne des résultats précis, et précise aussi à quelle échelle de temps physique ces résultats s'appliquent.

3. Le théorème de la boule chevelue

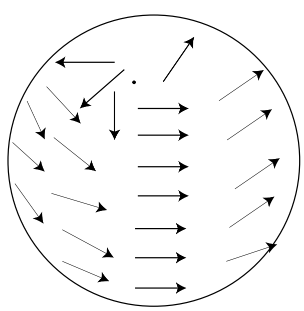
Voici un théorème de topologie, qui n'a été motivé que par l'étude pure de cette branche.

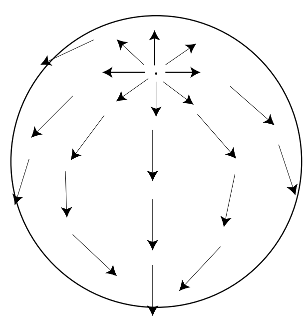
Considérons une sphère (la surface d'une boule) et en chaque point de cette surface un vecteur tangent: on parle d'un champ de vecteurs tangents à la sphère. On peut envisager cet objet en imaginant un cheveu planté en chaque point de la sphère et coiffé à plat (des cheveux coiffés en brosse ne sont pas tangents à la sphère).



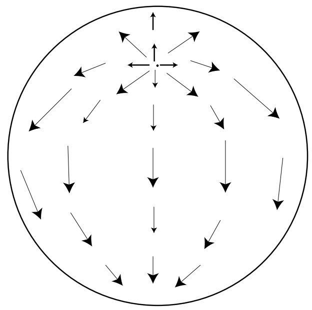
On demande que ce champ de vecteurs ait deux propriétés. Il doit être non nul, c'est-à -dire qu'aucun vecteur n'est réduit à 0. Il doit être continu, ce qui intuitivement signifie que si 2 points sont proches l'un de l'autre, les vecteurs correspondants le sont aussi.

Le théorème peut-être un peu inattendu dit qu'un tel champ de vecteurs n'existe pas sur la sphère. Les quelques dessins qui suivent montrent ce qui ne marche pas.

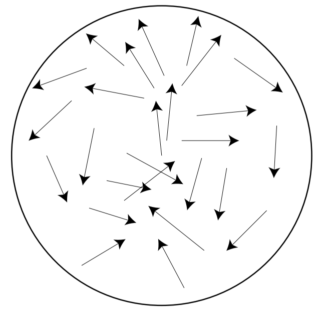




Deux champs de vecteurs non continus aux pôles



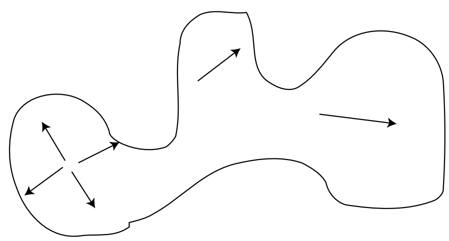
Un champ de vecteurs nul aux pôles



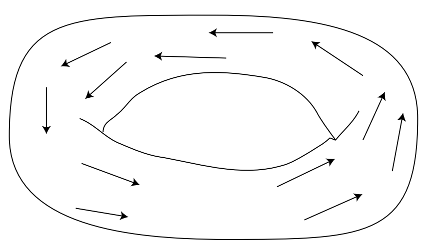
Champ de vecteurs non continu en un seul point

Intuitivement, on peut dire que si on essaie de coiffer à plat une sphère, on aura toujours un épi ou une ligne.

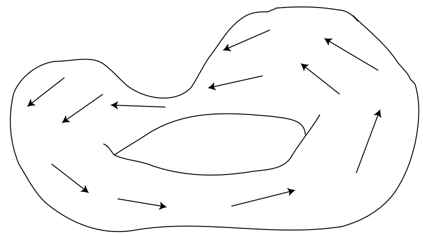
Une première remarque est que ce théorème reste vrai si on déforme la sphère en ellipsoide ou en n’importe quelle forme comme on pourrait le faire avec un ballon en caoutchouc.



Par contre, sur un tore (un pneu), on trouve facilement un champ de vecteurs continu non nul.



et ceci reste vrai si on déforme le tore:



Les propriétés des champs de vecteurs reflètent donc la forme générale de la surface (le fait qu'il y a un trou dans le tore et pas dans la sphère).

Voilà un théorème typique de topologie, suivant le développement interne de cette branche de mathématique pure sans souci des applications.

Et pourtant.

Depuis les années soixante, on s'intéresse fortement à la fusion nucléaire comme source d'énergie de l'avenir. Cette réaction utilise de l'hydrogène (et non de l'uranium comme la fission, utilisée actuelllement). Elle permettrait de produire de l'énergie au départ de l'hydrogène de l'eau des océans, sans produire de résidus radioactifs.

C'est la réaction qui se produit dans les étoiles, et la difficulté majeure est qu'elle ne peut se produire qu'à très haute température et pression, lorsque la matière est à l'état de plasma.

Toutes les particules sont en mouvement rapide, et un récipient dans lequel on mettrait ce plasma fondrait.

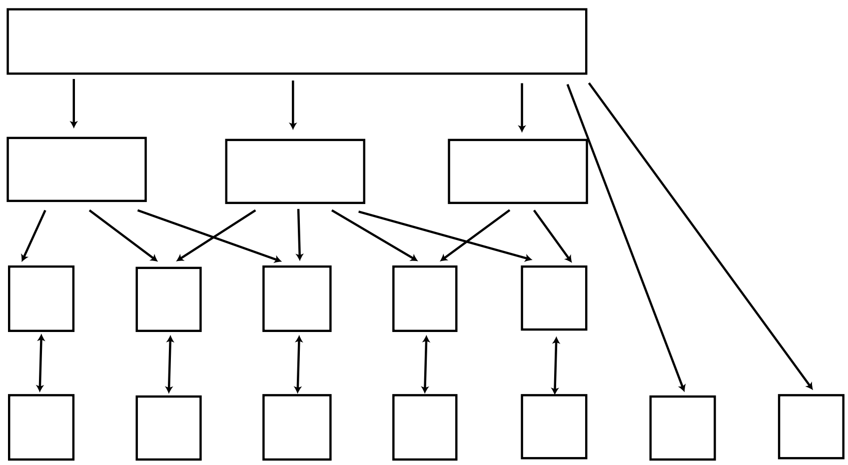
La solution proposée est de contenir le plasma en suspension en l'air par des champs magnétiques (une "bouteille magnétique"). Il pourrait sembler naturel de faire une telle bouteille en forme de boule, mais le théorème de la boule chevelue implique immédiatement que c'est impossible, le champ de vitesse des particules à la surface donnerait une contradiction.

On essaie donc de construire ces bouteilles magnétiques en forme de tore.

Un des plus grand est le JET (Joint European Torus) situé près d'Oxford et fruit d'une large coopération européenne.

Mais la réalisation est difficile (on n'y est pas encore!) et demande en particulier de sérieuses études théoriques mathématiques sur le transport de la matière et de la chaleur à l'intérieur du tore.

Remarquons qu'un théorème mathématique obtenu à l'époque où la fusion nucléaire n'était même pas concevable y trouve ainsi une application directe. C'est une application découlant de la théorie générale: on peut compléter le schéma 2 par des flèches comme suit:



Soulignons aussi qu'on a pu donner une information importante sur des équations qu'on ne peut pas résoudre.

A ce stade je pourrais discuter brièvement une question importante: comment reconnaître un bon théorème en mathématique?

On pourrait au moins demander que le théorème soit vrai, qu'il n'y ait pas de faute dans la démonstration.

Ce n'est pas un critère absolu: le théorème de Fermat a joué un rôle important dans le développement des mathématiques, et ce rôle aurait été le même si l'énoncé avait été faux. De même, un célèbre énoncé de Riemann (1859) n'a toujours pas été démontré et joue cependant un rôle important en théorie des nombres.

Ceci dit, ce sont des exceptions et on souhaite bien sûr que les théorèmes soient corrects, mais ceci n'implique pas qu'ils soient intéressants.

On pourrait aussi penser aux applications, mais les exemples donnés montrent que ce n'est pas un bon critère: si à chaque instant on avait gardé en vue une application immédiate des mathématiques, on n'aurait jamais dépassé le niveau II dans le schéma 2, et non seulement les mathématiques seraient presque inexistantes, mais un grand nombre de leurs applications seraient inconnues. Le théorème de la boule chevelue était un bon théorème de mathématique, et il s'est appliqué beaucoup plus tard à la physique. En fait, la physique des particules élémentaires se fait aujourd'hui à coups de groupes (créés par Galois pour étudier l'équation du 5ème degré) et de topologie ... deux branches qui existaient avant qu'on les emploie.

Alors, dans ce vaste corps des mathématiques pures qui progresse pour lui même, sans être lié aux applications, comment reconnaître un bon résultat?

Le mathématicien Hardy écrivait: ”Le test suprême est la beauté. Il n'y a pas de place permanente au monde pour de vilaines mathématiques”.

Avant de nous demander s'il avait raison, essayons de comprendre cette notion de beauté: pourquoi dira-t-on que tel résultat est beau? Je répondrai d'abord par une autre question: pourquoi le 3ème Concerto de Beethoven est-il beau? Cette question est évidemment sans réponse: on peut percevoir sa beauté, mais pas l'expliquer. Il en est en grande partie de même en mathématique, mais là on peut tenter d'expliquer un petit peu. Un mathématicien trouve un résultat beau si en le voyant, il se rend compte que c'est exactement cela qu'il fallait faire, et qu'un résultat dans une direction différente n'aurait pas été si instructif, ou si ce résultat établit des liens entre des théories qui avant n'en avaient pas, ou si brusquement on comprend mieux une quantité d'autres énoncés, qui, quoique démontrés, n'étaient pas vraiment compris, et qui apparaissent éclairés par une meilleure perspective, comme lorsqu'à la dernière page d'un roman policier, tous les faits inexpliqués décrits par l'auteur deviennent clairs et naturels. Ou au fond, comme Hardy, il trouve le résultat beau sans l'expliquer du tout.

Certainement, comme beaucoup d'autres, je me laisse guider par la beauté telle que le la perçois dans mon travail de mathématicien, donnant ainsi raison à Hardy, et bien souvent il apparaît qu'une belle théorie enrichit l'ensemble des mathématiques, ce qui mène ensuite à des applications utiles.

4. La transformée de Radon

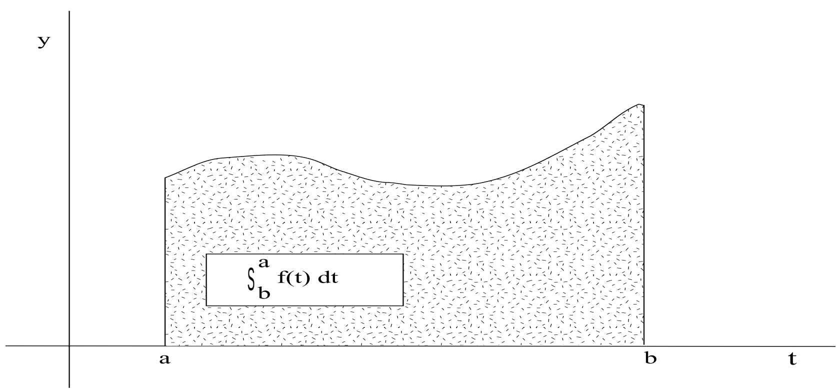
Nous avons vu que la mécanique céleste a conduit au développement du calcul différentiel. Il est apparu que bon nombre de phénomènes naturels étaient régis par des équations différentielles. Ceci justifie une fois pour toute l'étude de cette théorie mathématique, qui s'est alors développée pour elle-même.

Voici un exemple de résultat appartenant à cette théorie.

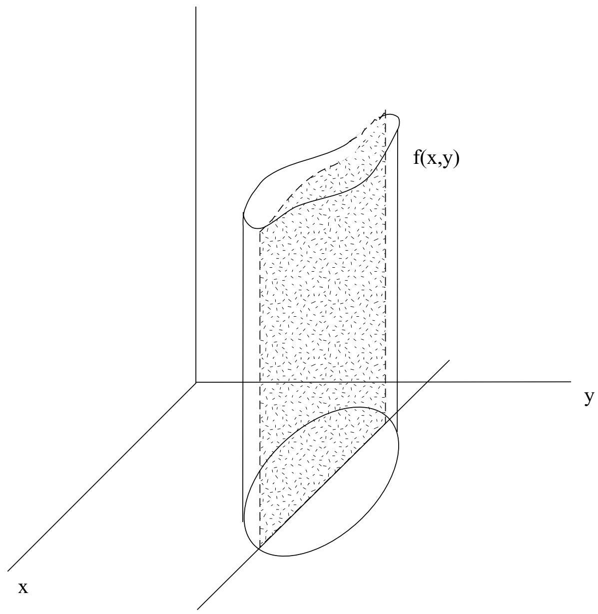
Rappelons d'abord que si $f(t)$ est une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$, son intégrale.

$$\int_a^b f(t)dt$$

représente l'aire comprise sous son graphe, et que le processus d'intégration est en quelque sorte inverse de la dérivation.



Considérons maintenant une fonction de 2 variables $f(x,y)$ définie sur un domaine du plan, par exemple un disque. A toute droite traversant ce disque, on associe l'intégrale de f sur l'intervalle constitué par l'intersection du disque et de la droite. Il s'agit donc de l'aire indiquée sur le dessin.



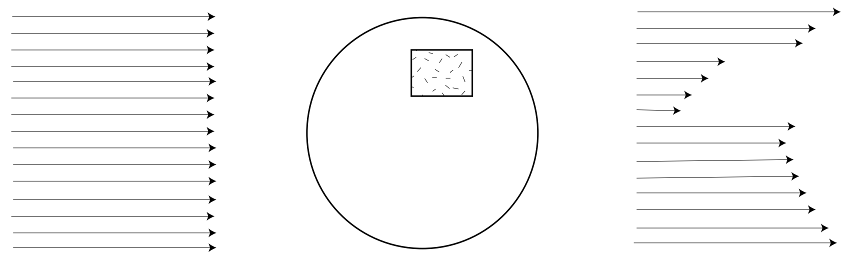
Supposons que la droite est d'équation $y = Ax + B$, elle est donc déterminée par les nombres A et B, et on peut noter $S(A, B)$ l'aire attachée à la droite.

A la fonction $f(x, y)$ on a ainsi associé une nouvelle fonction $S(A, B)$. On peut alors se demander si connaissant la fonction S, on peut retrouver la fonction f. Il ne s'agit pas seulement d'une question de calcul pratique, mais il faut s'assurer que deux fonctions f et g différentes ne peuvent pas donner la même fonction S, car sinon de S on ne saura pas s'il faut remonter à f ou à g.

La réponse est oui, S détermine f. C'est le théorème de la transformée de Radon.

Il a été démontré par Radon en 1917, simplement parce qu'il était intéressé par l'étude abstraite du calcul différentiel et intégral, sans souci des applications.

Vous vous doutez maintenant que si je donne cet exemple, c'est qu'il a débouché sur une application inattendue: le scanner médical. En effet, lorsqu'on fait une radiographie d'un corps, on envoie des rayons qui sont affaiblis lorsqu'ils rencontrent la matière, et la quantité soustraite mesure l'intégrale de la densité de matière sur le chemin parcouru.



Pour chaque droite d'une direction donnée, on a donc la valeur de l'intégrale de la fonction sur la droite. Si on fait tourner l'appareil et qu'on prend une radio dans chaque direction, on a complètement la fonction S, et le théorème de Radon garantit que f est déterminé.

En d'autres termes, deux tumeurs différentes ne peuvent donner le même résultat.

Mais l'application réelle est plus difficile. On a montré en 1977 que si on ne faisait qu'un nombre fini de radiographies (ce qui évidemment est le cas), on ne pouvait pas toujours reconstituer la position des tumeurs. Mathématiquement deux fonctions f différentes peuvent donner lieu aux mêmes intégrales sur un nombre fini de directions de droites.

Et ce problème est traité par d'autres méthodes mathématiques, assurant une détection de tumeurs avec une très forte probabilité.

5. Des lapins et des fractals

Nous voulons maintenant étudier la croissance d'une population sur un territoire (des bactéries sur une plaque, des lapins dans un terrain vague, ou même la population humaine). Comment exprimer cette croissance mathématiquement?

A intervalles réguliers, on compte les individus dans la population, et on note $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ le nombre obtenu au temps n.

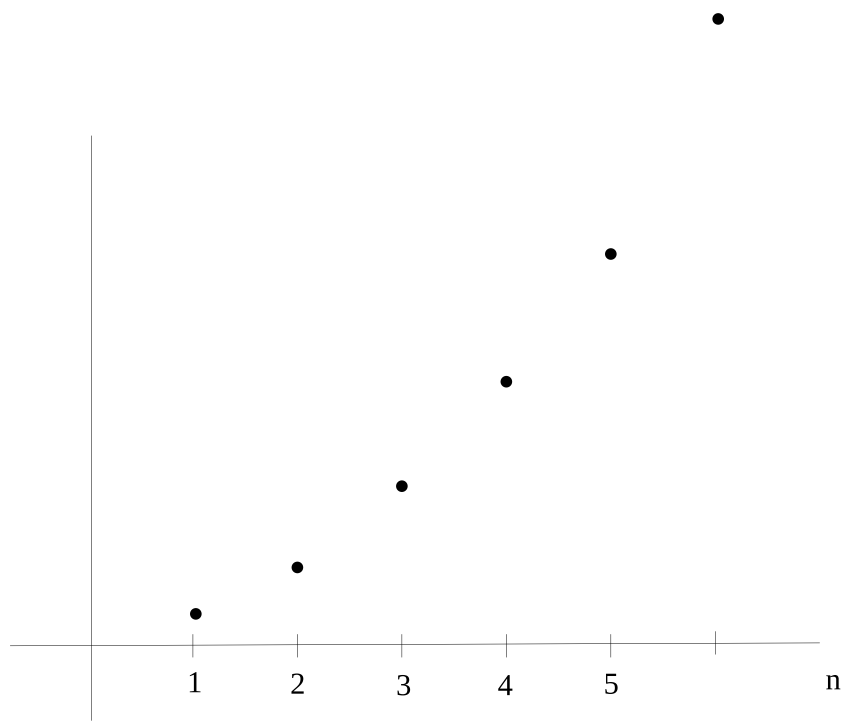
Une première idée pour décrire la croissance est que sur un intervalle de temps, les parents lapins auront des bébés lapins, qu'il y aura aussi des morts, et cela proportionnellement au nombre de lapins, donc:

$$y_{n+1} = y_n + a \cdot y_n,$$

le coefficient a étant le taux de croissance.
Si on résout cette équation, on a

$$\begin{aligned} y_n &= (1+a)y_{n-1} = (1+a)^2 y_{n-2} = \dots \\ &= (1+a)^n y_0, \end{aligned}$$

ce qui fournit une croissance exponentielle



Ceci est manifestement impossible et contraire à toute expérience: tant qu'il y a peu d'individus par rapport aux ressources existantes sur le terrain, cette croissance est possible, mais le terrain étant fini, la croissance doit ralentir puis s'arrêter.

Verhulst a suggéré en 1845 que le taux de croissance devrait être variable, et diminuer avec le nombre d'individus, et il a proposé comme taux

$$a - by_n,$$

Dès lors, lorsque $y_n = a/b$, la croissance s'arrête. Nous avons donc l'équation de Verhulst:

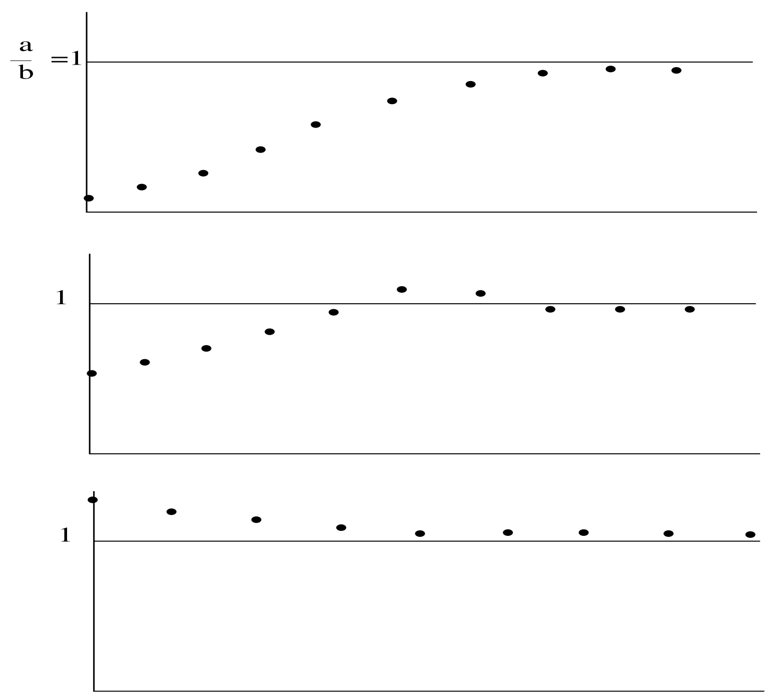
$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + (a - by_n)y_n \quad \text{c'est-à-dire} \\ y_{n+1} &= y_n + ay_n - by_n^2 \end{aligned}$$

Et il apparaît expérimentalement que cette équation simple est extraordinairement bonne: les bactéries, les animaux et même la population humaine respectent cette loi de très près.

Incidemment, ce que j'ai décrit ci-dessus est un processus de modélisation: on invente une équation pour décrire une situation en la justifiant tant bien que mal (pourquoi un taux $a - by_n$ et pas $a - by_n^2$ par exemple?) puis on vérifie que le modèle est bon, c'est-à-dire que les solutions de l'équation coïncident avec les observations expérimentales.

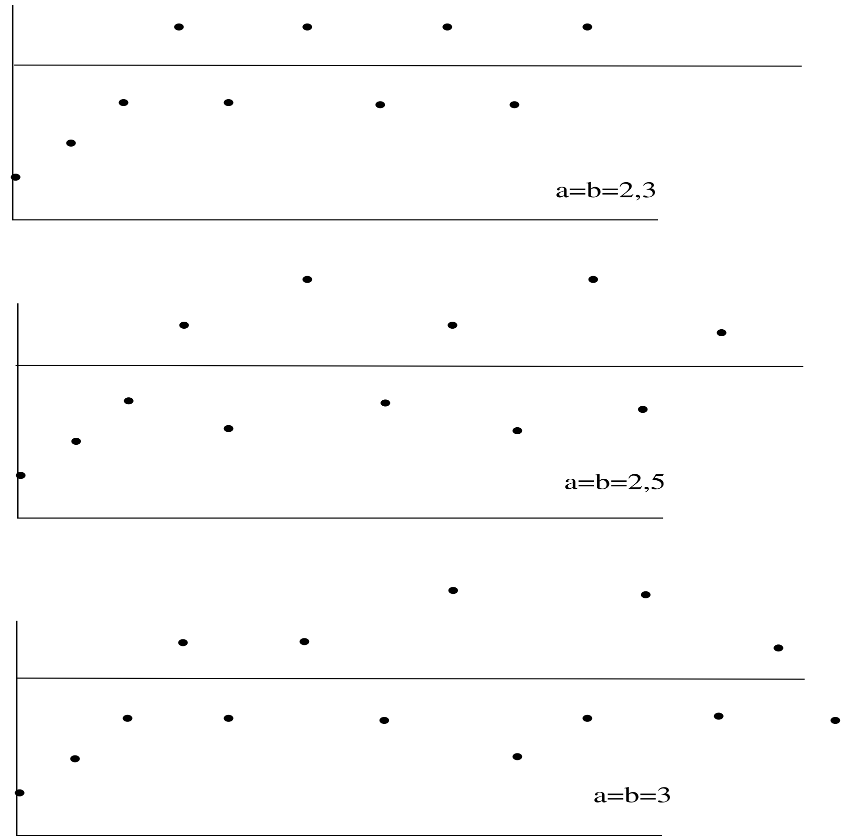
Esquissons sur des graphes les valeurs des solutions. Pour simplifier prenons le cas $a = b$.

Lorsque $a = b < 2$, suivant les valeurs initiales y_0, on obtient des graphes ressemblent à:



Dans tous ces cas, la population tend vers une valeur limite a/b quand t devient grand - ce qui est le comportement attendu.

Mais lorsque $a = b$ dépassent 2, on obtient des graphes très différents:



Ainsi, quand a et b croissent, le graphe s'approche d'abord d'un graphe périodique, puis devient très irrégulier. On dit alors que le comportement est chaotique. Il n'y a donc plus de valeur limite à la population, elle oscille autour de la valeur a/b.

En résumé, suivant les valeurs de a et b, on a des comportements différents à la limite pour n tendant vers l'infini.

Cette observation concernant une équation vieille de plus d'un siècle a donné lieu récemment (depuis 1975) à de spectaculaires développements en mathématique pure.

Pour voir apparaître de nouveaux comportements, on passe de la droite au plan: on remplace la loi $y_n \to y_{n+1}$ dans $I\!R$ par une loi $z_n \to z_{n+1}$ dans $I\!R^2$.

Une loi extrêmement simple peut être choisie en considérant $\mathbb{R}^2$ comme plan des nombres complexes, et en posant

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

où $c \in \mathbb{C}$ est fixé.

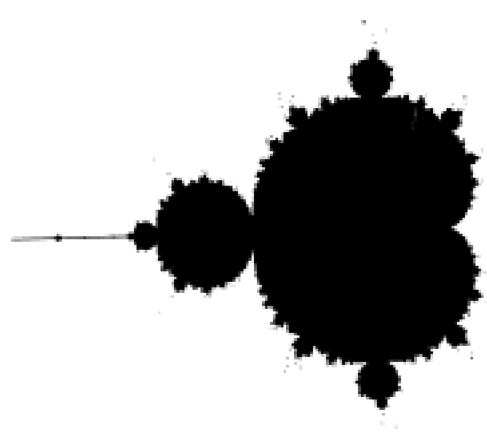
Si on souhaite éviter les nombres complexes, on notera (x_n, y_n) les coordonnées du point z_n et on définira la loi $(x_n, y_n) \to (x_{n+1}, y_{n+1})$ par

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + c_1 \\ y_{n+1} &= 2x_n y_n + c_2 \end{aligned}$$

où $c = (c_1, c_2)$ est un couple de réels, que l'on représentera comme un point d'un autre plan.

A nouveau, suivant la valeur de c, le processus aura des comportements différents quand n tend vers l'infini. Leur description est plus compliquée que dans la cas de l' équation de Verhulst, mais disons qu'il y a essentiellement 2 comportements.

Dans le plan du point c, dessinons en noir les points correspondant à un comportement, en blanc les autres. On pourrait s'attendre, l'équation de z_{n+1} étant extrêmement simple, à ce que les régions noires et blanches le soient aussi, par exemple un disque et son complément.
Or, bien au contraire, l'ensemble des points noirs est extrêmement compliqué, le dessin ci-après en donnant une vue approximative.



(Pour une spectaculaire collection de photos en couleurs d'ensembles de ce type, voir le livre de H. Peitgen et P. Ritcher cité dans la bibliographie, dont ce dessin est tiré).

Cet ensemble est appelé ensemble de Mandelbrot. Comme on le soupçonne sur le dessin, son bord est extrêmement compliqué: il est constitué de morceaux de cercles, avec des morceaux de cercles de plus en plus petits attachés dessus et ceci indéfiniment. En fait, si on dessine un carré bien choisi sur le dessin et qu'on l'agrandit, on retrouve le même dessin. Si on repète cette opération 2 fois, 1000 fois, un milliard de fois, on retrouve toujours le même dessin. On peut penser à une côte rocheuse déchiquetée, et dont le moindre mm^2 est tout aussi déchiqueté que la côte entière. Un tel ensemble est appelé fractal.

On a démontré depuis 1980 (Mandelbrot, Douady, Hubbard...) que ces phénomènes n'étaient pas liés à la forme particulière de l'équation de z_{n+1}, mais apparaissaient toujours et de la même façon pour une énorme famille de processus. Il y a donc là quelque chose de très profond.

Pendant longtemps, on a considéré que des ensembles aussi compliqués étaient des anomalies qu'il ne fallait pas étudier - on se contentait de se restreindre à des cas où ils n'apparaissaient pas. Et c'est seulement récemment qu'on a perçu qu'ils avaient leur vraie place en mathématique.

Le bord de l'ensemble, avec toute sa complication, est appelé ensemble de transition, puisqu'on passe d'un comportement à l'autre.

Et les physiciens ont rejoint les mathématiciens: certaines transitions de phase en magnétisme (la manière dont un aimant chauffé perd son magnétisme) donnent lieu à des ensembles tout à fait similaires.

Notons aussi que la description du comportement chaotique du système solaire fait partie du même élargissement des notions considérées en mathématique.

Dans les deux cas, l'ordinateur a joué un rôle dans le développement de la théorie, non pas parce qu'il démontre des théorèmes, mais parce qu'il peut faire un nombre de calculs impossible auparavant, et que ces calculs servent d'exemples et de moteur à l'intuition.

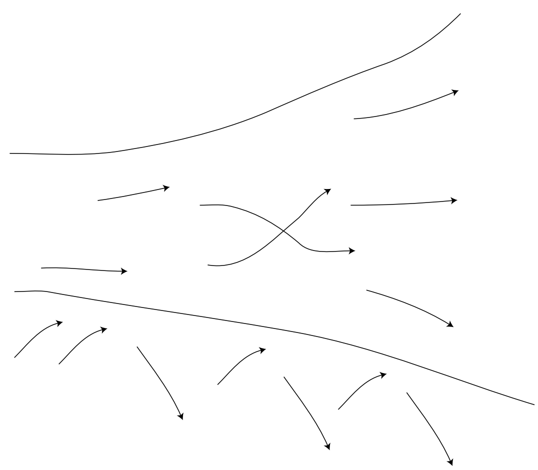
Si Mandelbrot, Douday et Hubbard ont pu démontrer des propriétés des ensembles fractals, c'est parce qu'ils ont d'abord pu les observer sur des images informatiques.

Leus démonstrations sont toutefois de nature théorique.

Conclusion?

J'ai présenté ici quelques exemples de recherches mathématiques, en liaison avec des problèmes réels. Mais j'espère avoir montré que l'étude mathématique dépassait le problème initial, et qu'en fait il faut faire des mathématiques pour elles-mêmes si on veut encore à l'avenir résoudre des problèmes.

Dans un dernier schéma, je présenterai la mathématique comme une rivière qui avance indéfiniment, les différentes branches (algèbre, géométrie, analyse...) se mélangeant sans cesse. Son développement est influencé par les problèmes posés à l'extérieur, et elle fournit des réponses à ces problèmes, mais son développement se fait surtout en suivant sa dynamique interne, sa notion de beauté et d'harmonie.



Bibliographie

Un certain nombre de mathématiciens ont heureusement accompli depuis quelques années de sérieux efforts pour expliquer leur branche à des non-spécialistes.

Je recommande en particulier les livres suivants:

-Ian Stewart: From here to infinity. A guide to today's mathematics, Oxford Univ. Press (1996)

Ce livre est une réédition mise à jour de ”The problems of mathematics” qu’il avait publié en 1987 (et traduit en français chez Pour la science - Belin sous le titre : Les mathématiques).

L’auteur dresse un panorama assez complet des mathématiques d’aujourd’hui, en évitant les développements techniques. Pour ce livre, un minimum de connaissance mathématique est toutefois nécessaire pour certains chapitres.

- S. Hildelbrandt, A. Tromba: Mathématiques et formes optimales. Pour la science, Belin (1986).

Les auteurs montrent par un texte clair et de nombreuses photos comment des principes de moindre action imposent différentes formes - il est question de physique, de bulles de savon, de cristaux, d’architectures, de nids d’abeilles.

- Ivar Ekeland: Le chaos, Dominos Flammarion (1995)
L’auteur donne un exposé particulièremnt clair et précis de la théorie du chaos.

- La mission Voyager 2 évoquée au §2 pose un nombre énorme de problèmes mathématiques: en plus du contrôle de la trajectoire et de l’orientation du satellite, on peut mentionner la transmission rapide des données à plusieurs milliards de km de distance. On en aura une idée en lisant:
R. Laeser, W. McLaughlin et D. Wolff: La Mission Voyager 2: une prouesse technique. Pour la science n° 111, Janvier 1987.

Le sujet des fractals fournit de spectaculaires photos en couleurs des ensembles de Mandelbrot. On trouvera ces photos et des explications théoriques claires dans:
H.O. Peitgen, P.H. Richter: The beauty of fractals, Springer Verlag 1986.

- Enfin, ceux qui en auront l’occasion ne rateront pas le programme Fermat’s Last Theorem, réalisé par S. Singh et J. Lynch pour la série Horizon de la BBC (on en trouve le texte sur http: //www.bbc.co.uk/horizon/fermat.shtml). Le progamme, extraordinairement vivant, montre la vie des chercheurs tout en racontant la ”saga” du théorème de Fermat-Wiles.

Comme je l’ai indiqué, cet article présente un point de vue partiel et personnel sur les mathématiques. Toutefois, il a bénéficié des commentaires de M. Cahen,

J. Doyen, M. Parker, A. Valette et P. Van Praag.

Je remercie également la Communauté française de Belgique, qui soutient mon travail par une Action de Recherche Concertée de la Direction de la Recherche scientifique.

Adresse de l'auteur:
Départment de Mathématique
C.P. 218 Campus Plaine
Université Libre de Bruxelles
1050 Bruxelles